INTRO

Ogni EQUAZIONE con UNA VARIABILE può essere scritta come $P(x) = 0$.

ESEMPIO: Data l'equazione $2x - 3 = 2$ possiamo riscriverla come segue

$$2x - 3 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - 5 = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{SOTTRATTO } 2\\ \text{AD ENTRAMBI I LATI}\end{array}\right)$$

dunque ponendo $P(x) = 2x - 5$ abbiamo riscritto la nostra equazione iniziale, nella forma $P(x) = 0$.

Nei casi più SEMPLICI è possibile trovare una FORMULA che ci permette di risolvere in modo ESATTO la nostra equazione. Questo è il caso per i POLINOMI di PRIMO e SECONDO GRADO. Infatti,

- Se $P(x) = ax + b$, allora $\boxed{x = \frac{-b}{a}}$

- Se $P(x) = ax^2 + bx + c$, allora

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Non sempre è possibile risolvere l'equazione $P(x)=0$ in modo ESATTO. Ad esempio, non esiste una FORMULA GENERALE per la seguente eq.

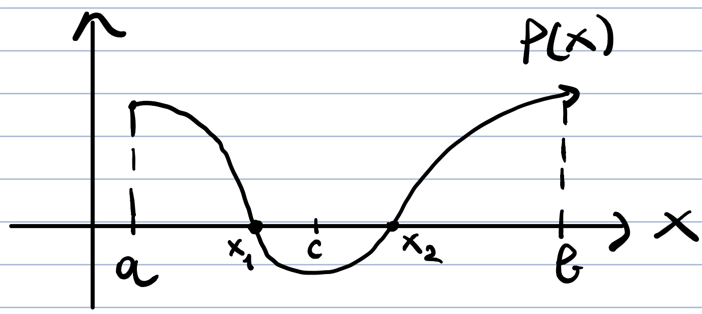
$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

In questi casi dobbiamo studiare dei METODI, o ALGORITMI, che ci permettono di APPROSSIMARE la soluzione da noi ricercata.

La RICERCA delle soluzioni approssimate è composta da due fasi:

1) Nella prima fase vogliamo individuare degli INTERVALLI che contengono SOLTANTO una RADICE.

ESEMPIO: Dato il grafico



Due possibili intervalli utili sono $[a,c]$ e $[c,b]$, in quanto il primo contiene solo la radice x_1, mentre il secondo solo la radice x_2.

2) Per OGNI intervallo trovato, applichiamo un METODO DI APPROSSIMAZIONE per calcolare la soluzione con il grado di PRECISIONE voluto.

OSSERVAZIONE: Esistono vari METODI DI APPROSS.

Metodi diversi possono presentare CARATTERISTICHE e PROPRIETÀ diverse. A noi interessano

- LA VELOCITÀ DEL METODO, ovvero il numero di ITERAZIONI richieste per avvicinarci al valore della soluzione.

- LA PRECISIONE DEL METODO, ovvero che tipo di GARANZIE il metodo ci offre rispetto all'ERRORE dell'APPROSSIMAZIONE.

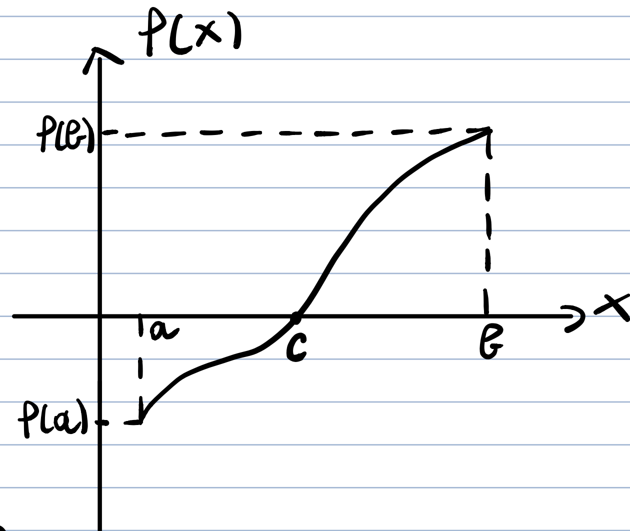
Andiamo quindi a descrivere dei risultati TEORICI, ovvero dei TEOREMI, che ci permettono di risolvere il problema 1), detto anche problema della SEPARAZIONE DELLE RADICI.

SEPARAZIONE DELLE RADICI

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

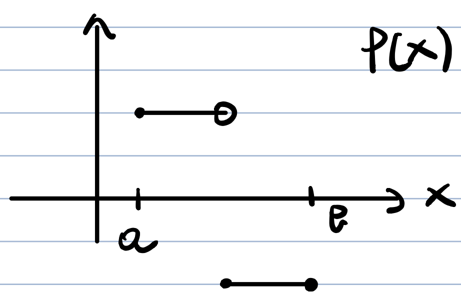
Sia f una funzione CONTINUA nell'intervallo $[a, b]$ CHIUSO e LIMITATO.

Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, ovvero se f assume valori di SEGNO OPPOSTO negli estremi dell'intervallo a, b, allora ESISTE ALMENO un punto c nell'intervallo $[a, b]$ tale che $f(c) = 0$.



Notiamo che l'ipotesi di CONTINUITÀ è una condizione NECESSARIA per poter applicare il TEOREMA, come dimostrato a seguire

CONTRO ESEMPIO :



f NON CONTINUA

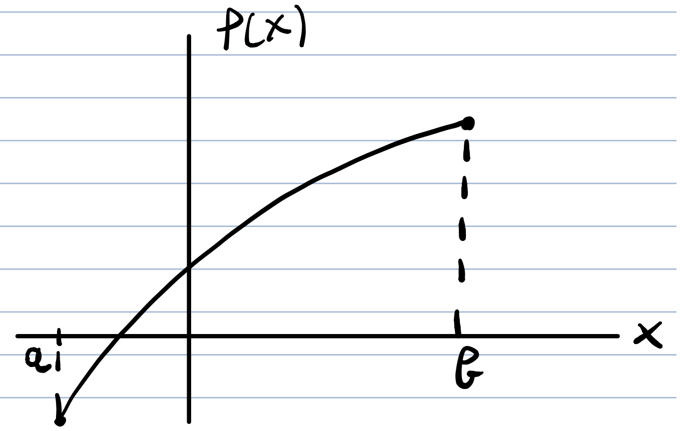
Notiamo che $f(a) \cdot f(b) < 0$, ma comunque f non si annulla mai in $[a, b]$.

ESEMPIO: Data la funzione $f(x) = 3x^2 - 2$ e dato l'intervallo $[a, b] = [0, 2]$ osserviamo che f è una funzione POLINOMIALE ed è quindi CONTINUA e che l'intervallo $[a, b]$ dato è CHIUSO e LIMITATO. RISPETTANDO le IPOTESI del teorema ci basta notare che $f(0) = -2$ e $f(3) = 10$ per CONCLUDERE che ESISTE ALMENO UNO ZERO di f in $[0, 2]$

PRIMO TEOREMA DI UNICITÀ DELLO ZERO

Sia f una funzione CONTINUA nell'intervallo $[a, b]$ CHIUSO e LIMITATO e sia f DERIVABILE con derivata prima diversa da 0 in $[a, b]$

Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora ESISTE UN SOLO PUNTO c in $[a, b]$ in cui f si annulla, ovvero t.c. $f(c) = 0$.



SECONDO TEOREMA DI UNICITÀ DELLO ZERO

Sia f una funzione CONTINUA nell'intervallo $[a, b]$ CHIUSO e LIMITATO e sia f DERIVABILE DUE VOLTE in $[a, b]$

Se $f(a) \cdot f(b) < 0$

e $f''(x) > 0$ oppure $f''(x) < 0$

Allora ESISTE UN SOLO PUNTO c in $[a, b]$ in f si annulla, ovvero t.c. $f(c) = 0$.

APPROSSIMAZIONE DELLE RADICI

Andiamo ora a descrivere alcuni metodi per APPROSSIMARE il valore di una radice.

METODO DI BISEZIONE

Al fine di localizzare uno ZERO di f in $[a,b]$ procediamo calcolando il punto MEDIO c, dato da

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Una volta calcolato c possiamo avere esattamente uno dei casi a seguire

1) $f(c) = 0$,

   In questo caso abbiamo trovato uno zero di f in $[a,b]$ e ci FERMIAMO.

2) $f(a) \cdot f(c) < 0$,

   In questo caso ITERIAMO il procedimento nell'intervallo più piccolo a SINISTRA, ovvero $[a,c]$.

3) $f(b) \cdot f(c) < 0$,

In questo caso ITERIAMO il procedimento nell'intervallo più piccolo a DESTRA, ovvero $[c, b]$.

ESEMPIO:

$f(x) = x^2 - 3$

$[a, b] = [0, 2]$

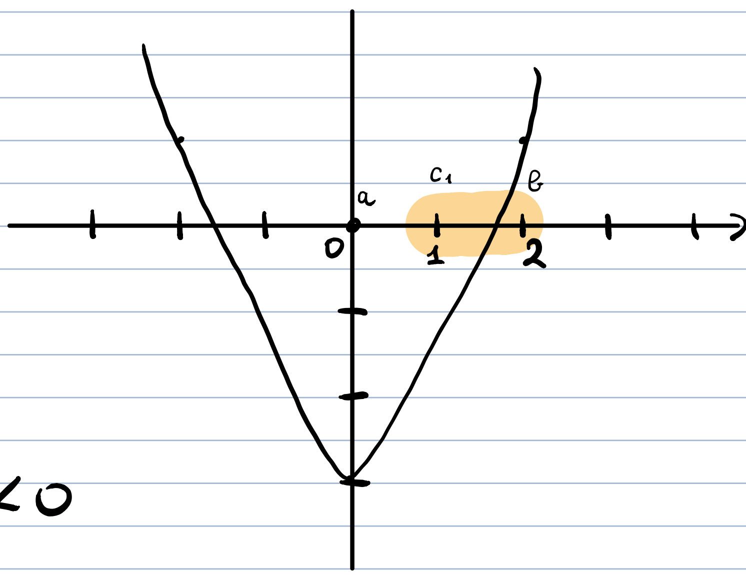
1° PASSO

$$c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$f(c_1) = -2$

$f(a) = -3$

$f(b) = 1$



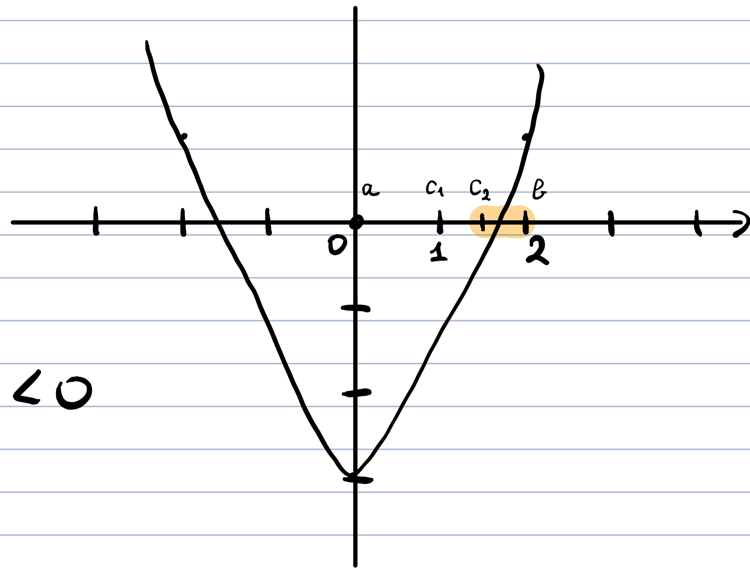
Dunque $f(c_1) \cdot f(b) < 0$ e iteriamo in

$[c_1, b] = [1, 2]$

2° PASSO

$$c_2 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$p(c_2) = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$$

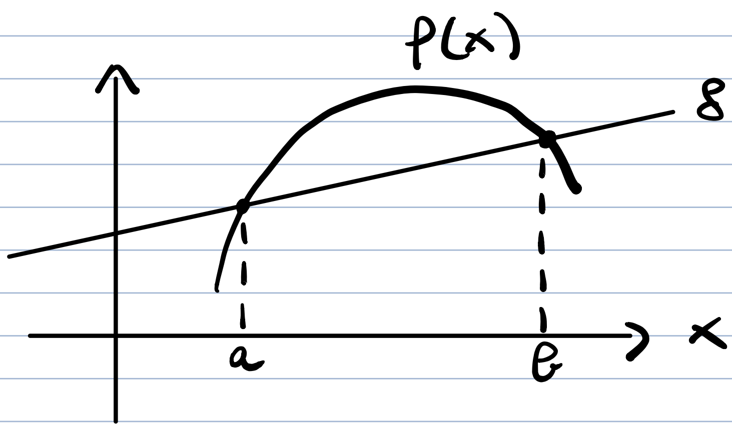


Dunque $p(c_2) \cdot p(b) < 0$
e iteriamo in
$[c_2, b] = [\frac{3}{2}, 2]$

Notiamo che più ITERAZIONI effettuiamo e più ci avviciniamo allo ZERO ricercato.
In altri termini, il numero CONVERGE al valore della radice di p.

METODO DELLE SECANTI

Si basa sul calcolo di rette SECANTI per trovare il punto c da utilizzare per suddividere l'intervallo in cui ricercare la radice



retta SECANTE di f nei punti a, b.

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$$

Notiamo che $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$.

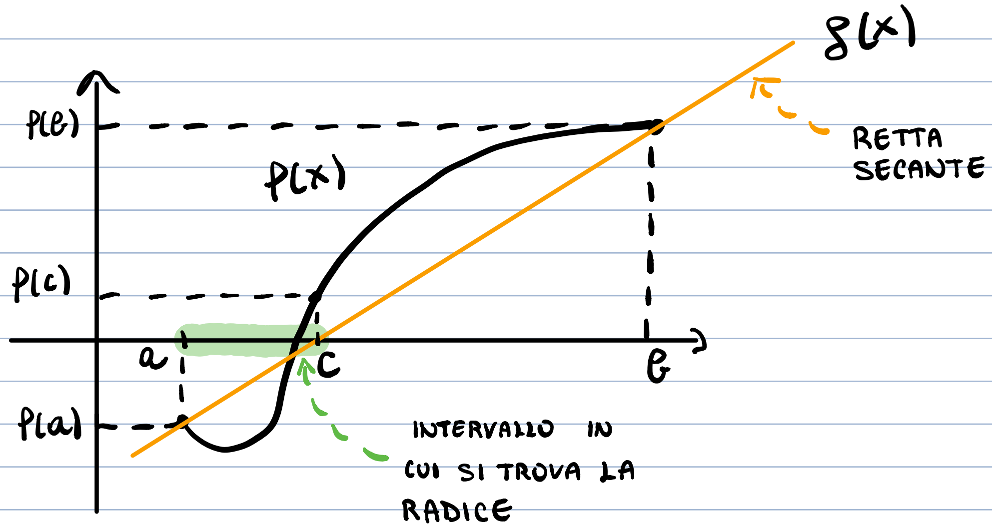
Il METODO DELLE SECANTI è quindi descritto come segue:

1) Si CALCOLA l'equazione $g(x)$ della RETTA SECANTE ad f nei punti a, b.

2) Si trova il punto c tale che $g(c) = 0$

3) A seconda dei SEGNI dei valori $f(a)$, $f(b)$ e $f(c)$ si sceglie il SOTTO-INTERVALLO tra $[a,c]$, $[c,b]$ che contiene almeno una radice.

Graficamente il metodo è applicato come segue

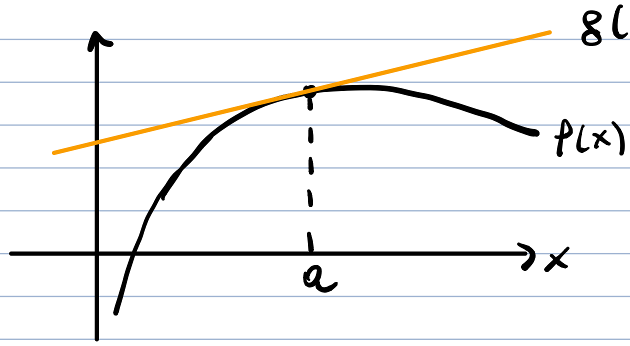


Dato che $f(c) \cdot f(a) < 0$, abbiamo che la radice si troverà nell'intervallo $[a,c]$.

OSSERVAZIONE: Il metodo appena descritto è molto simile al METODO DI BISEZIONE. La DIFFERENZA sta nel modo in cui viene calcolato il punto intermedio C: nel METODO DI BISEZIONE C è il punto MEDIO dell'intervallo $[a,b]$, mentre nel METODO DELLE SECANTI C è il punto in cui la SECANTE di f nei punti a e b si ANNULLA.

METODO DELLE TANGENTI

Molto simile al metodo visto prima, ma al posto delle SECANTI vengono utilizzate le TANGENTI.



$g(x)$ ← Retta TANGENTE ad f nel punto a.

Questa parte è aggiunta per avere che $g(a) = f(a)$

$$g(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Il valore della DERIVATA è la PENDENZA della retta TANGENTE ad f nel punto a.

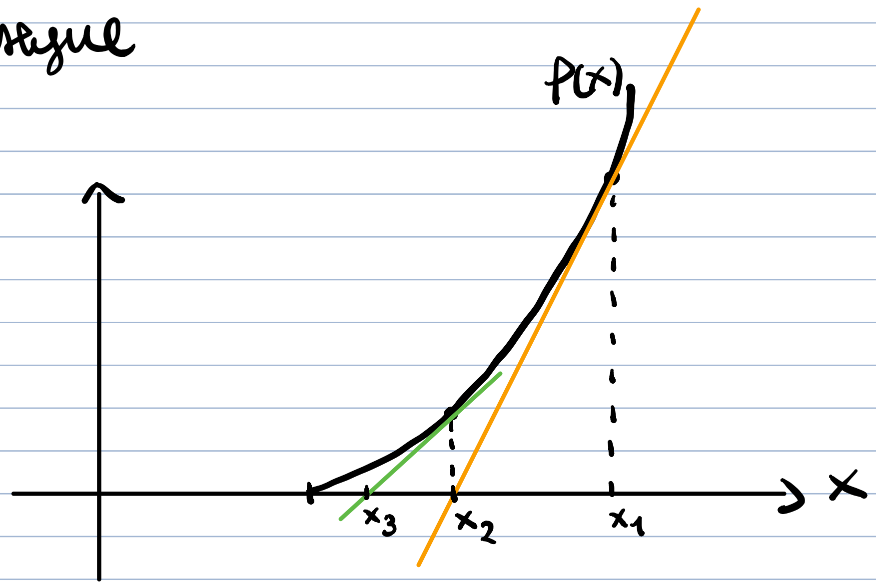
Il metodo può quindi essere descritto come segue:

1) Si CALCOLA l'equazione $g(x)$ della RETTA TANGENTE ad f nel punto a.

2) Si trova il punto c tale che $g(c) = 0$

3) Si ripete il procedimento partendo dal punto c.

Graficamente il metodo è applicato come segue



Come è possibile vedere, più iterazioni del metodo si effettuano e più ci avviciniamo al valore della radice.

NOTA BENE: NON SEMPRE il metodo delle tangenti funziona, ovvero CONVERGE al valore della RADICE. La CONVERGENZA del metodo dipende dal PUNTO INIZIALE scelto.

METODO DEL PUNTO FISSO

TODO.